

Politechnika Gdańska
Wydział Elektrotechniki i Automatyki
Katedra Inżynierii Systemów Sterowania

Podstawy Automatyki

Regulatory PID

Materiały pomocnicze do ćwiczeń – termin T13

Opracowanie:

Kazimierz Duzinkiewicz, dr hab. inż.

Michał Grochowski, dr inż.

Robert Piotrowski, dr inż.

Tomasz Rutkowski, dr inż.

Grzegorz Ewald, mgr inż.

Gdańsk, październik 2009

Wprowadzenie

Projektując układy sterowania, w szczególności liniowe, staramy się, aby zaprojektowany układ sterowania był stabilny i posiadał pewne dodatkowe własności, np. miał odpowiedni zapas stabilności, miał pożądane wartości parametrów jakości statycznej i dynamicznej itd. W wielu wypadkach powyższe warunki można spełnić włączając w strukturę sterowania dodatkowe układy pomocnicze, między innymi **regulatory**.

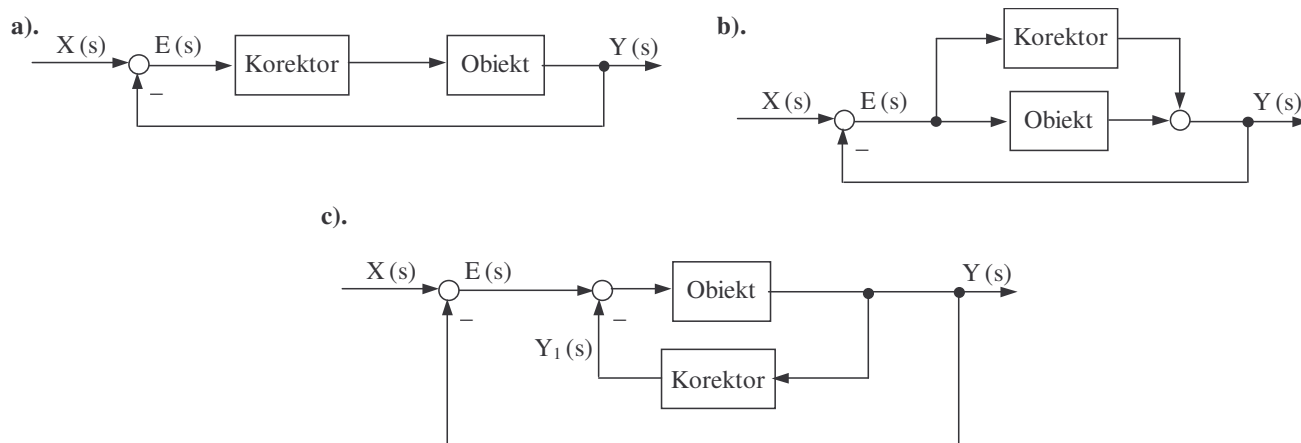
Parametry regulatorów przemysłowych, budowanych jako oddzielne urządzenia lub stanowiących moduły programowe sterowników PLC mogą być nastawiane, zaś parametry innych członów korekcyjnych, konstruowanych zwykle jako elementy wbudowane układów sterowania nie mogą podlegać wielokrotnej nastawie.

Podstawowe rodzaje korekcji

Chcąc uzyskać odpowiednią zmianę transmitancji układu regulacji można stosować następujące rodzaje korekcji:

- korekcja szeregową – polega na włączeniu w dogodnym miejscu do pętli układu regulacji, szeregowo, wybranego członu korekcyjnego,
- korekcja polegająca na utworzeniu dodatkowych pętli wokół jednego lub kilku członów układu:
 - korekcja równoległa,
 - korekcja w sprzężeniu zwrotnym.

Rysunek 1 przedstawia struktury układów regulacji uzyskiwane z wymienionymi rodzajami korekcji.



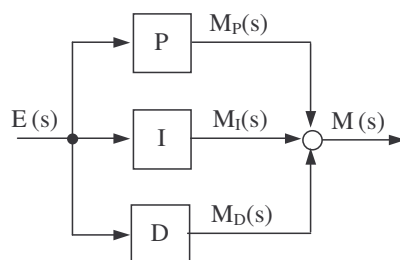
Rysunek 1. Rodzaje korekcji w układach regulacji: a). korekcja szeregową, b). korekcja równoległą, c). korekcja w sprzężeniu zwrotnym

Korekcja szeregową przedstawioną na Rysunku 1a znalazła najszersze zastosowanie w przemysłowych układach sterowania jednowymiarowego. Korektor szeregowy takiej struktury nazywany jest regulatorem.

Rodzaje regulatorów

Regulatory – szeregowo czony korekcyjne, w których możliwe jest wielokrotne nastawienie jednego lub kilku parametrów. Głównym zadaniem regulatora, jak zresztą każdego urządzenia sterującego, jest wytwarzanie w oparciu o sygnał uchybu sterowania $e(t)$, sygnału sterującego obiektem regulacji $m(t)$, w sposób zapewniający jego zachowanie zgodnie z przyjętymi wymaganiami.

Działanie regulatorów oparte jest o przetwarzanie sygnału uchybu z wykorzystaniem trzech elementarnych operacji: wzmocnienia – operacja P, całkowania – operacja I oraz różniczkowania – operacja D. Ogólna struktura tak działających regulatorów została przedstawiona na Rysunku 2.



Rysunek 2. Schemat blokowy regulatora

Sygnał wyjściowy z regulatora jest postaci:

$$M(s) = M_P(s) + M_I(s) + M_D(s) \quad (1)$$

gdzie:

$M_P(s)$ – składowa proporcjonalna do uchybu regulacji wytwarzana przez blok P,

$M_I(s)$ – składowa całkująca proporcjonalna do całki uchybu regulacji wytwarzana przez blok I,

$M_D(s)$ – składowa różniczkująca proporcjonalna do pochodnej uchybu regulacji wytwarzana przez blok D.

Działanie proporcjonalne:

Działanie to zmniejsza uchyb regulacji w stanie ustalonym, nieznacznie wpływa na skrócenie czasu regulacji (zwiększa prędkość odpowiedzi) i zwiększa przeregulowanie.

Działanie całkujące:

Działanie to sprowadza uchyb regulacji w stanie ustalonym do zera, wpływa na wydłużenie czasu regulacji i zwiększa przeregulowanie.

Działanie różniczkujące:

Działanie to nie wpływa na uchyb regulacji w stanie ustalonym, wpływa na skrócenie czasu regulacji i zmniejsza przeregulowanie.

Ze względu na wykorzystanie poszczególnych składowych w sygnale generowanym przez regulator, praktyczne zastosowanie znalazły następujące rodzaje regulatorów:

- proporcjonalny P,
- proporcjonalno - całkujący PI,
- proporcjonalno - różniczkujący PD,
- proporcjonalno – całkująco - różniczkujący PID.

Regulator całkujący I nie znalazł zastosowania, ponieważ jego obecność w układzie regulacji pogarsza właściwości dynamiczne tego układu.

Regulator różniczkujący D nie jest stosowany, ponieważ jego obecność w układzie regulacji ogranicza się tylko do przebiegów przejściowych.

a). Regulator proporcjonalny P

Sygnal wyjściowy z regulatora P jest postaci:

$$m(t) = k_p e(t) \quad (2)$$

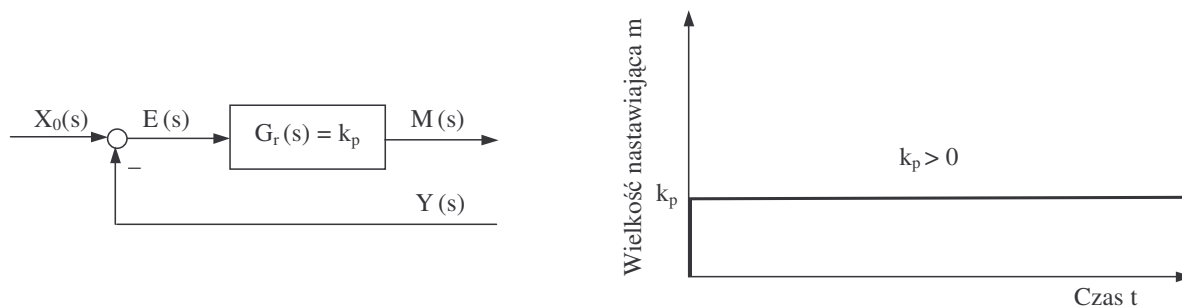
gdzie:

k_p – współczynnik wzmocnienia.

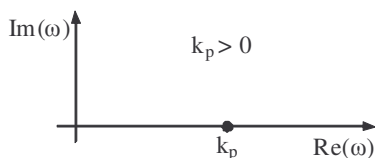
Transmitancja operatorowa regulatora P ma postać:

$$G_r(s) = k_p \quad (3)$$

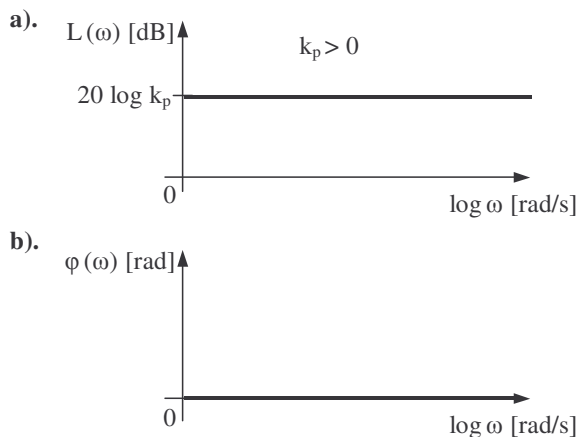
Zakres proporcjonalności $X_p = \frac{1}{k_p} \cdot 100\%$ – procentowa, w stosunku do pełnego zakresu, zmiana wielkości uchybu regulacji e , potrzebna do wywołania pełnego zakresu zmiany wielkości m .



Rysunek 3. Charakterystyka skokowa regulatora P



Rysunek 4. Charakterystyka amplitudowo – fazowa regulatora P (charakterystyka Nyquist'a)



Rysunek 5. Charakterystyki logarytmiczne regulatora P (charakterystyki Bode'a): a). modułu, b). fazy

b). Regulator proporcjonalno – całkujący PI

Sygnał wyjściowy z regulatora PI jest postaci:

$$m(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right] \quad (4)$$

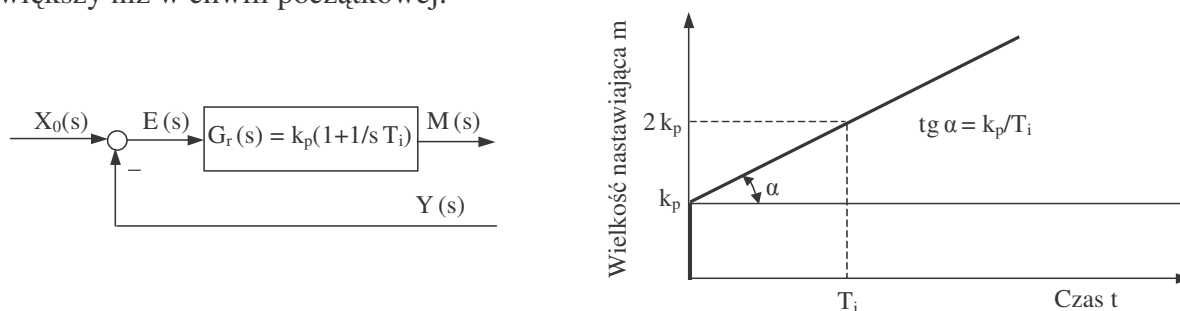
gdzie:

T_i – stała czasowa całkowania.

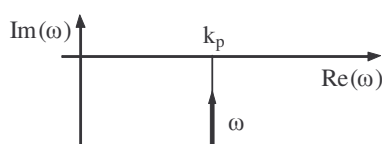
Transmitancja operatorowa regulatora PI ma postać:

$$G_r(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) \quad (5)$$

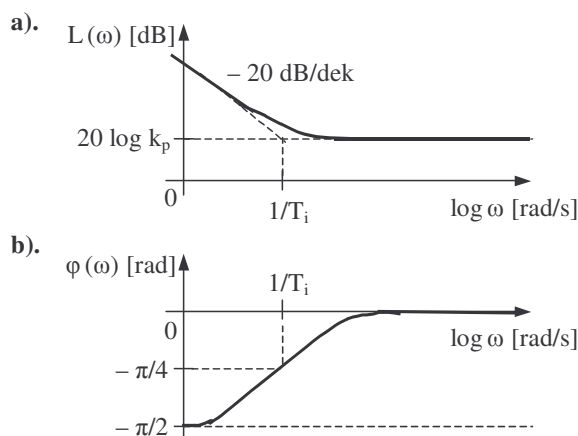
Czas zdwojenia T_i – czas potrzebny na to, aby przy skokowym wymuszeniu podanym na wejście regulatora PI, część sygnału wyjściowego tego regulatora, wywołana całkowaniem, stała się równa drugiej części sygnału wyjściowego wywołanej działaniem proporcjonalnym, dzięki czemu sumaryczny sygnał wyjściowy z regulatora staje się po czasie T_i dwukrotnie większy niż w chwili początkowej.



Rysunek 6. Charakterystyka skokowa regulatora PI



Rysunek 7. Charakterystyka amplitudowo – fazowa regulatora PI (charakterystyka Nyquist'a)



Rysunek 8. Charakterystyki logarytmiczne regulatora PI (charakterystyki Bode'a): a). modułu, b). fazy

c). Idealny regulator proporcjonalno – różniczkujący PD

Sygnal wyjściowy z idealnego regulatora PD jest postaci:

$$m(t) = k_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (6)$$

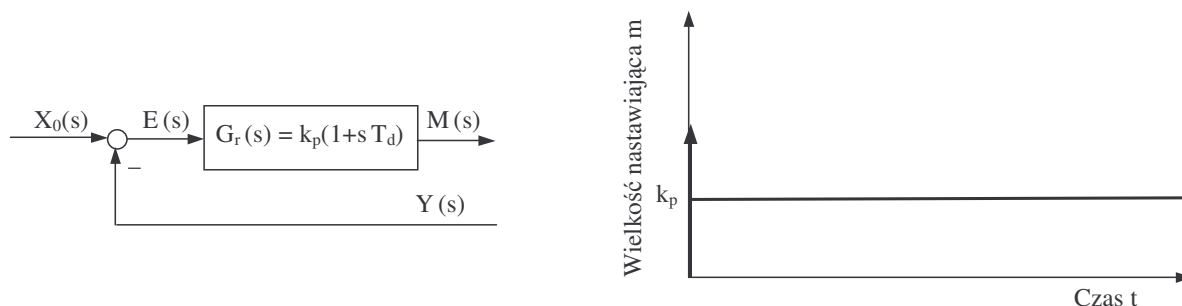
gdzie:

T_d – stała czasowa różniczkowania.

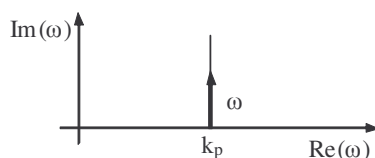
Transmitancja operatorowa idealnego regulatora PD ma postać:

$$G_r(s) = k_p(1 + sT_d) \quad (7)$$

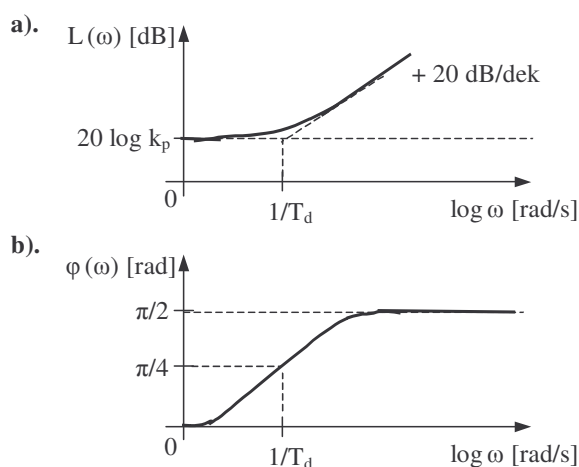
Czas wyprzedzenia T_d – czas potrzebny na to, aby przy liniowo narastającym wymuszeniu podanym na wejście regulatora PD, sygnał związany z działaniem proporcjonalnym zrównał się z sygnałem pochodzącym od działania różniczkującego.



Rysunek 9. Charakterystyka skokowa idealnego regulatora PD



Rysunek 10. Charakterystyka amplitudowo – fazowa idealnego regulatora PD (charakterystyka Nyquist'a)



Rysunek 11. Charakterystyki logarytmiczne idealnego regulatora PD (charakterystyki Bode'a): a). modułu, b). fazy

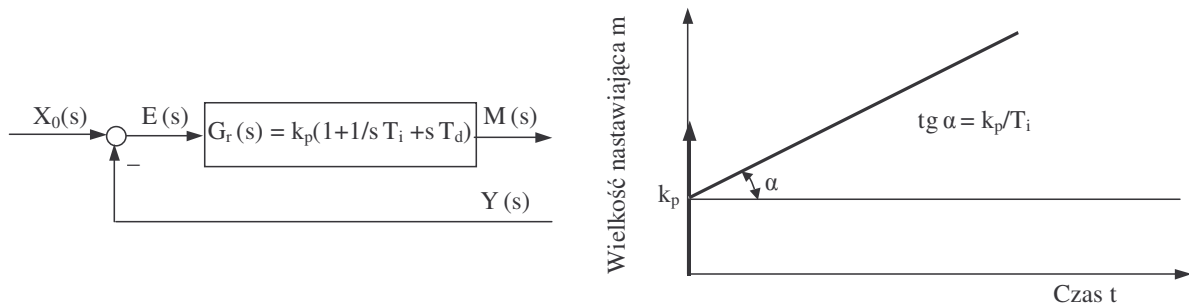
d). Idealny regulator proporcjonalno – całkująco – różniczkujący PID

Sygnał wyjściowy z idealnego regulatora PID jest postaci:

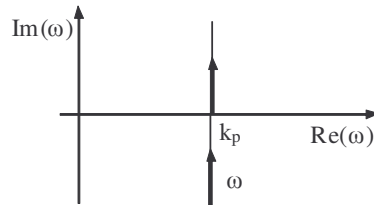
$$m(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (8)$$

Transmitancja operatorowa idealnego regulatora PID ma postać:

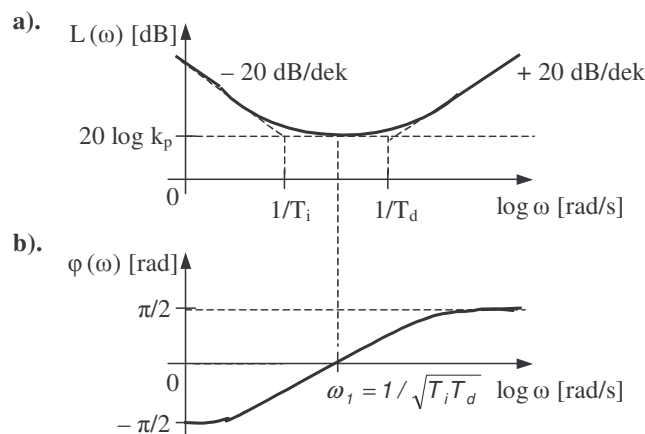
$$G_r(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (9)$$



Rysunek 12. Charakterystyka skokowa idealnego regulatora PID



Rysunek 13. Charakterystyka amplitudowo – fazowa idealnego regulatora PID (charakterystyka Nyquist'a)



Rysunek 14. Charakterystyki logarytmiczne idealnego regulatora PID (charakterystyki Bode'a): a). modułu, b). fazy

W praktyce nie jest możliwe uzyskanie różniczkowania w pełnym zakresie częstotliwości. W związku z tym możliwe do zrealizowania regulatory mają inercję ograniczającą częstotliwościowo efekt różniczkowania i tym samym otrzymujemy: rzeczywisty regulator PD i rzeczywisty regulator PID.

e). Rzeczywisty regulator proporcjonalno – różniczkujący PD

Sygnal wyjściowy z rzeczywistego regulatora PD jest postaci:

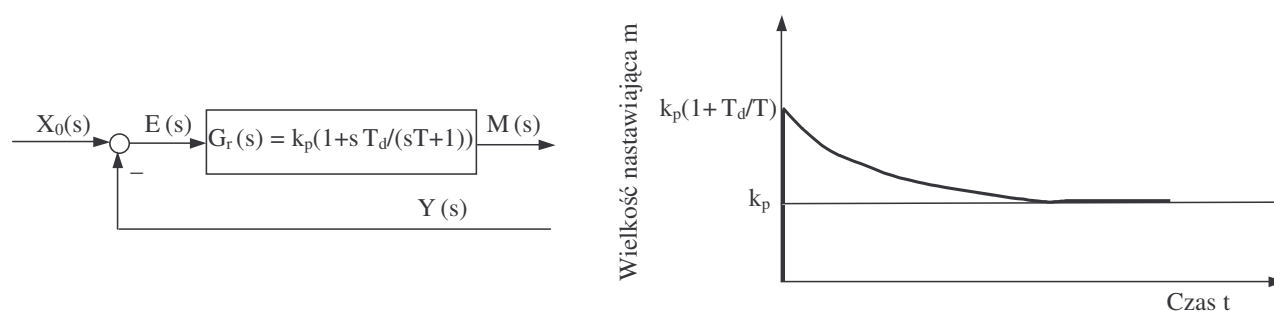
$$m(t) = k_p \left(e(t) + \frac{T_d}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (10)$$

gdzie:

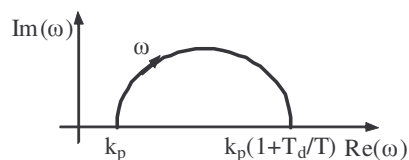
T – stała czasowa inercyjności członu różniczkującego.

Transmitancja operatorowa rzeczywistego regulatora PD ma postać:

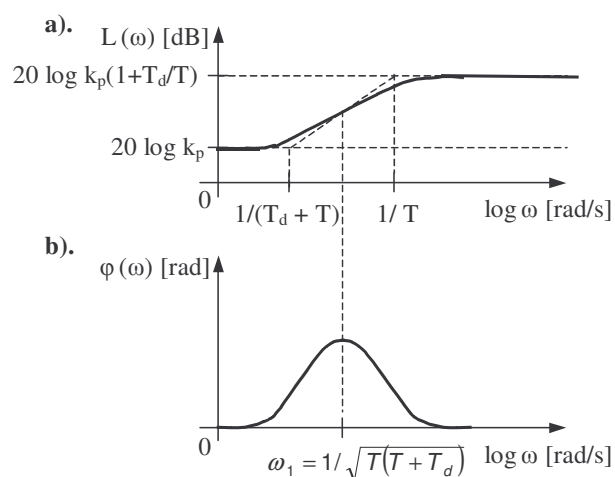
$$G_r(s) = k_p \left(1 + \frac{s T_d}{s T + 1} \right) \quad (11)$$



Rysunek 15. Charakterystyka skokowa rzeczywistego regulatora PD



Rysunek 16. Charakterystyka amplitudowo – fazowa rzeczywistego regulatora PD (charakterystyka Nyquist'a)



Rysunek 17. Charakterystyki logarytmiczne rzeczywistego regulatora PD (charakterystyki Bode'a): a). modułu, b). fazy

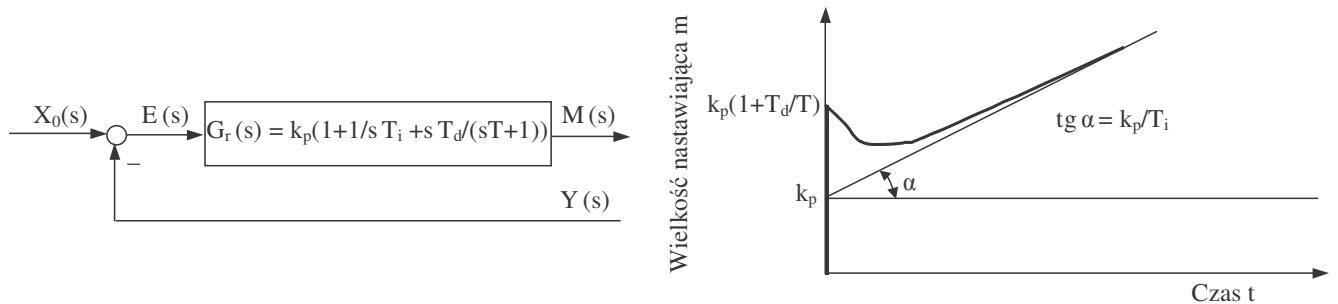
f). Rzeczywisty regulator proporcjonalno – całkująco – różniczkujący PID

Sygnał wyjściowy z rzeczywistego regulatora PID jest postaci:

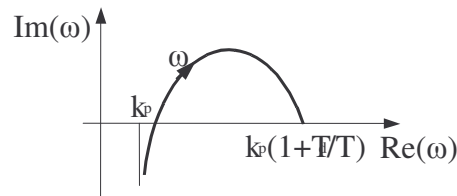
$$m(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) + \frac{T_d}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right] \quad (12)$$

Transmitancja operatorowa rzeczywistego regulatora PID ma postać:

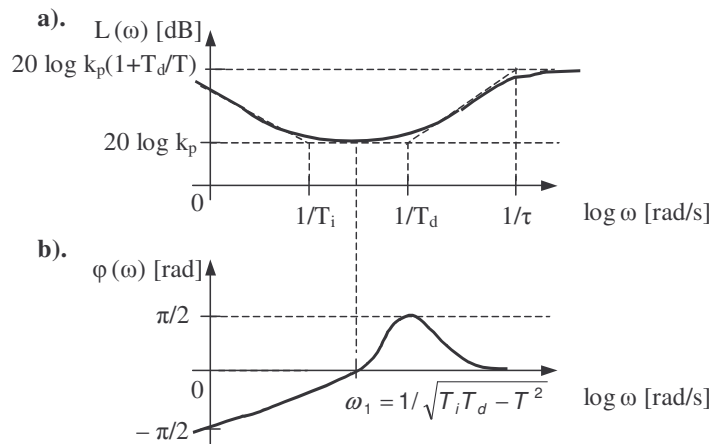
$$G_r(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{sT+1} \right) \quad (13)$$



Rysunek 18. Charakterystyka skokowa rzeczywistego regulatora PID



Rysunek 19. Charakterystyka amplitudowo – fazowa rzeczywistego regulatora PID (charakterystyka Nyquist'a)



Rysunek 20. Charakterystyki logarytmiczne rzeczywistego regulatora PID (charakterystyki Bode'a): a). modułu, b). fazy

W przedstawionych regulatorach, wielkości: k_p , T_i i T_d to tzw. **nastawy regulatorów**, czyli stałe wielkości dające się nastawiać.

Rozważając nastawy regulatorów musimy pamiętać, że mają one swoje **zakresy nastaw, ograniczenia nastaw i zależność (interakcję) nastaw**.

Zakres nastaw – przedział zmienności nastaw k_p , T_i i T_d , który można ustawić w danym regulatorze.

Ograniczenia nastaw – w przypadku pewnych struktur regulatorów niedozwolone jest nastawianie dowolnych wartości nastaw, mimo że znajdują się one w zakresie, np. czasami nie można zrealizować nastaw, które nie spełniają nierówności $T_i \geq 4T_d$.

Zależność (interakcja) nastaw – w przypadku pewnych struktur regulatorów nie można wyodrębnić elementów, które będą niezależnie wpływały na nastawy k_p , T_i i T_d . Ustawienie jednej z wielkości wpływa na pozostałe.

Wybór regulatora i jego nastaw

W praktyce zachodzi konieczność wyboru regulatora oraz jego nastaw, dla danego obiektu regulacji, zakłóceń i wymagań układu regulacji.

a). Pierwsza metoda Zieglera – Nicholasa

Ogólnie obiekty regulacji mogą być podzielone na układy statyczne i astatyczne.

Transmitancję obiektów statycznych można aproksymować transmitancją operatorową postaci:

$$G_o(s) = \frac{K}{Ts+1} \cdot e^{-sT_0} \quad (14)$$

natomiast transmitancję obiektów astatycznych można aproksymować transmitancją operatorową postaci:

$$G_o(s) = \frac{K}{s} \cdot e^{-sT_0} = \frac{K'}{Ts} \cdot e^{-sT_0} \quad (15)$$

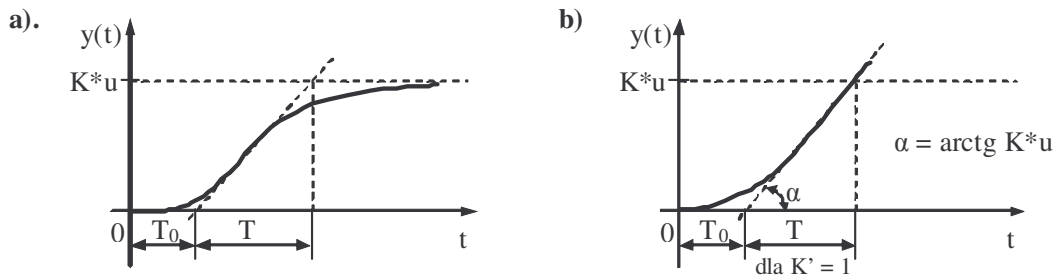
gdzie:

K – zastępczy współczynnik proporcjonalności obiektu,

T – zastępcza stała czasowa obiektu,

T_0 – zastępcze opóźnienie obiektu.

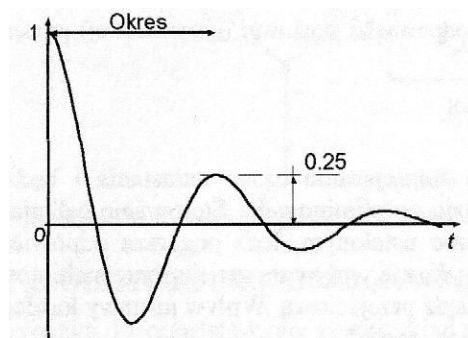
Parametry K , T i T_0 wyznacza się na podstawie odpowiedzi obiektu na wymuszenie skokowe.



Rysunek 21. Wyznaczenie parametrów K , T i T_0 : a). obiektu statycznego, b). obiektu astatycznego

Badania Zieglera i Nicholasa pokazały, że odpowiedź skokowa większości układów sterowania ma kształt zbliżony do tego z Rysunku 21. Można ją otrzymać z danych eksperymentalnych lub dynamicznej symulacji obiektu.

W pierwszej metodzie Zieglera - Nicholasa wyboru regulatora i jego nastaw opiera się na kwadratowym współczynniku zanikania równym w przybliżeniu 0,25 (Rysunek 22). Oznacza to, że dominująca składowa przejściowa zanika do jednej czwartej swojej wartości maksymalnej po jednym okresie oscylacji.



Rysunek 22. Charakterystyka czasowa kwadratowego współczynnika zanikania

Ziegler i Nichols symulacyjnie badali różne obiekty regulacji i stroili parametry regulatorów, aż do uzyskania odpowiedzi przejściowych zanikających do 25% poprzedniej wartości w jednym okresie. Tym sposobem uzyskali oni konkretne wartości nastaw w zależności od

rodzaju regulatora ($a = \frac{K}{T} \cdot T_0$):

- Dla regulatora P: $k_p = \frac{1}{a}$.
- Dla regulatora PI: $k_p = \frac{0,9}{a}$, $T_i = 3T_0$.
- Dla regulatora PID: $k_p = \frac{1,2}{a}$, $T_i = 2T_0$, $T_d = 0,5T_0$.

Pierwsza metoda Zieglera – Nicholasa daje dobre rezultaty, gdy spełniony jest następujący warunek:

$$0,15 < \frac{T_0}{T} < 0,6 \quad (16)$$

b). Druga metoda Zieglera – Nicholasa

Jest to najbardziej znana, eksperymentalna metoda wyboru regulatora i jego nastaw. Sposób postępowania jest następujący:

- Zakłada się, że dany jest obiekt regulacji, którego opis matematyczny nie musi być znany.
- Do obiektu regulacji dołącza się regulator. Wyłącza się całkujące i różniczkujące działanie regulatora (tzn. nastawia się maksymalną wartość stałej czasowej całkowania T_i i minimalną wartość stałej czasowej różniczkowania T_d) i np. dla jednostkowego wymuszenia skokowego, stopniowo zwiększa się współczynnik wzmocnienia k_p regulatora, dochodząc do granicy stabilności.
- W stanie oscylacji nietłumionych mierzy się ich okres T_{osc} . Następnie, otwierając układ regulacji, mierzy się wartość współczynnika wzmocnienia k_{kr} , przy którym te oscylacje występują.
- Otrzymaną wartość k_{kr} dzieli się przez 2 uzyskując tym samym $k_p = 0,5k_{kr}$. Wartość tę przyjmuje się jako docelową.
- Przy określonym rodzaju wymuszenia dokonuje się rejestracji wielkości wyjściowej obiektu w celu zastosowania przyjętego wskaźnika jakości.
- Gdy przebieg wyjściowy nie spełnia stawianych wymagań, wówczas w celu jego poprawy dokonuje się przełączenia regulatora z P na PI lub PID.
- W zależności od rodzaju regulatora należy przyjąć:
 - Dla regulatora P: $k_p = 0,5k_{kr}$.
 - Dla regulatora PI: $k_p = 0,45k_{kr}$, $T_i = \frac{T_{osc}}{1,2}$.
 - Dla regulatora PID: $k_p = 0,6k_{kr}$, $T_i = 0,5T_{osc}$, $T_d = \frac{T_{osc}}{8}$.

Druga metoda Zieglera – Nicholasa oparta jest na wykorzystaniu tylko dwóch parametrów: T_{osc} i k_{kr} , charakteryzujących granicę stabilności danego układu regulacji. Nie jest to zatem metoda bardzo dokładna, ale prosta i zapewniająca stabilną pracę zamkniętego układu regulacji. Zastosowanie tej metody wymaga doprowadzenia układu regulacji do nietłumionych oscylacji, ale nie ma potrzeby identyfikacji dynamiki obiektu regulacji. Metoda ta zapewnia dobre tłumienie zakłóceń, ale daje mały zapas fazy i duże przeregulowanie dla skokowych zmian wartości zadanej.

c). Inne metody

Wybierając regulator i jego nastawy można to zrobić wykorzystując różne kryteria jakości, np.: 0% przeregulowania, 20% przeregulowania, minimum całki kwadratu uchybu regulacji itp.

Nastawy regulatorów dla obiektów statycznych opisanych zależnością (14) dla trzech kryteriów zostały przedstawione w tabeli 2. Nastawy regulatorów dla obiektów astatycznych opisanych zależnością (15) dla tych samych kryteriów przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 2. Nastawy regulatorów dla obiektów statycznych ($a = \frac{K}{T} \cdot T_0$)

Rodzaj regulatora	Przeregulowanie=0% Minimum czasu reg. t_r			Przeregulowanie=20% Minimum czasu reg. t_r			$\int_0^{\infty} e^2(t) dt$ Min		
	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
P	0,3/a	–	–	0,7/a	–	–	–	–	–
PI	0,6/a	0,8 T_0 +0,5 T	–	0,7/a	T_0 +0,3 T	–	1/a	T_0 +0,35 T	–
PID	0,95/a	2,4 T_0	0,4 T_0	1,2/a	2,0 T_0	0,4 T_0	1,4/a	1,3 T_0	0,5 T_0

Tabela 3. Nastawy regulatorów dla obiektów astatycznych ($b = \frac{T}{T_0}$)

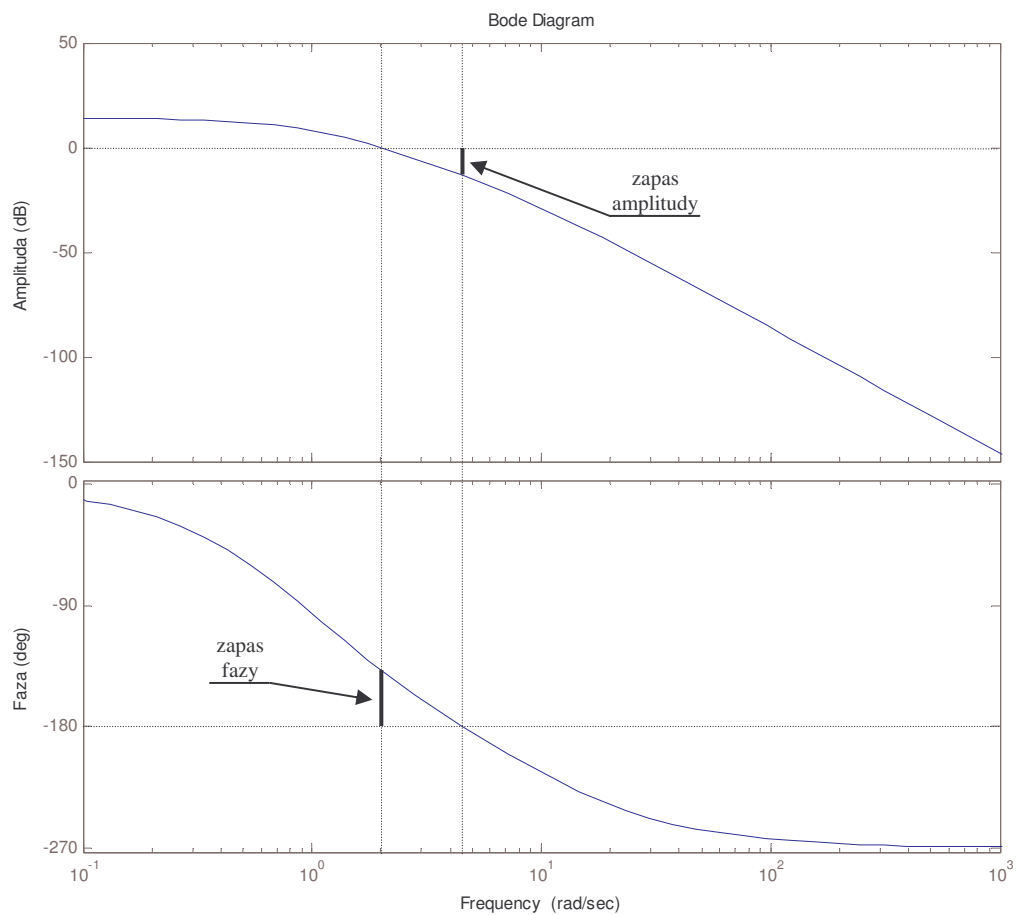
Rodzaj regulatora	Przeregulowanie=0% Minimum czasu reg. t_r			Przeregulowanie=20% Minimum czasu reg. t_r			$\int_0^{\infty} e^2(t) dt$ Min		
	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
P	0,37b	–	–	0,7b	–	–	–	–	–
PI	0,46b	5,75 T_0	–	0,7b	3,0 T_0	–	1b	4,3 T_0	–
PID	0,65b	5,0 T_0	0,23 T_0	1,1b	2,0 T_0	0,37 T_0	1,36b	1,6 T_0	0,5 T_0

Zapas amplitudy oraz zapas fazy na wykresach Bode'a

Zapas amplitudy oraz zapas fazy, nazywane czasami zapasem stabilności, określają „odległość” układu od granicy stabilności.

Zapas amplitudy jest przeciwieństwem wzmocnienia układu wyrażoną w dB, dla częstotliwości, przy której przesunięcie fazowe wynosi -180° . Zapas fazy jest różnicą pomiędzy wartością przesunięcia fazowego oraz -180° , dla częstotliwości, przy której wzmocnienie wynosi 0 dB.

Na rys. 22 przedstawiono ilustrację zapasu fazy oraz amplitudy.



Rysunek 23. Ilustracja zapasu fazy oraz amplitudy