„EUROELEKTRA”
OLIMPIADA ELEKTRYCZNA I ELEKTRONICZNA
Rok szkolny 2007/2008 – Etap trzeci - Grupa elektroniczno-telekomunikacyjna

Zestaw zawiera 4 zadania. Wszystkie zadania są jednakowo punktowane. Czas rozwiązywania - 120 minut.

ZADANIA

Zad. 1.

Pokazany na rysunku układ jest wzmacniaczem transkonduktancyjnym, którego prąd wyjściowy $I_o = I_{D1}$ - I_{D2} (różnica prądów drenu obu tranzystorów) jest sterowany różnicą napięć wejściowych $V_i = V_1$ - V_2. Układ składa się z pary różnicowej polaryzowanej przez źródło prądowe o wydajności $2I$ i lustra prądowego, które przenosi prąd I_{D1} tranzystora M1 na wyjście. Tranzystory M1 i M2 mają identyczne właściwości, pracują w zakresie słabej inwersji i zakresie pentodowym (zakres nasycenia), a ich prąd drenu I_D jest związany z napięciem bramka-źródło U_{GS} wzorem (1). Pokaż, że statyczna charakterystyka przejściowa tego wzmacniacza, tj. I_o jako funkcja napięcia różnicowego V_i oraz prądu I jest opisana wzorem (2). Na bazie charakterystyki (2) określ (na wyrażeniach ogólnych) transkoduktancję g_m tego układu, zdefiniowaną jako pochodna dI_o/dV_i w punkcie $V_i = 0$.

$$I_D \cong I_{D0} e^{kU_{GS}} , \tag{1}$$

gdzie k i I_{D0} są współczynnikami.

$$I_o = 2I\left[\left(1 + e^{-kV_i}\right)^{-1} - \left(1 + e^{kV_i}\right)^{-1}\right] \tag{2}$$

Dane:

I – prąd polaryzujący parę M1-M2

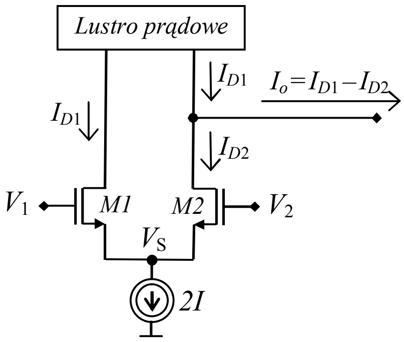
$I_o = I_{D1} - I_{D2}$

$V_i = V_1 - V_2$

Szukane:

$I_o = f(V_i, I) = ?$

$g_m = \dfrac{dI_o}{dV_i} = f(I) = ?$



Zad. 2.

Energia E sygnału dyskretnego jest określona wzorem:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 ,$$

gdzie *x(n)* jest n-tą próbką sygnału.
Dany jest sygnał dyskretny o postaci:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n ,$$

gdzie $n \geq 0$.
Wyznaczyć energię tego sygnału.

Zad. 3.

Jeżeli sygnał o postaci:

$$x(t) = [1 + \cos(\omega t + \varphi)]\cos(\omega t) ,$$

gdzie ω jest pulsacją wyrażoną w radianach na sekundę,

zostanie podany na wejście idealnego filtru dolnoprzepustowego o pulsacji granicznej $\omega_g = \dfrac{3\omega}{2}$,

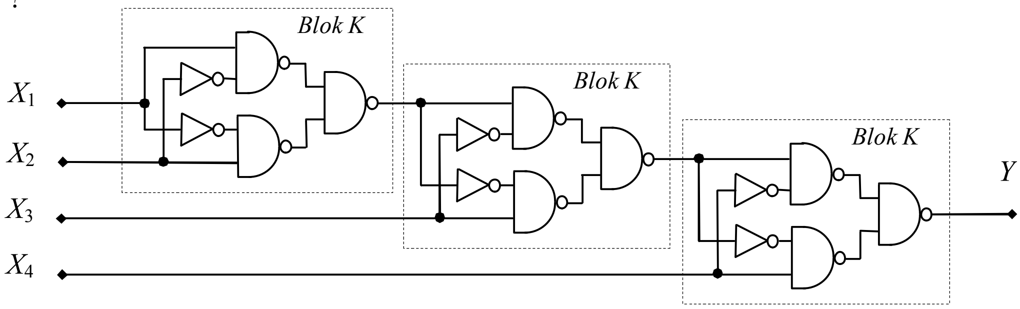
to jaki sygnał pojawi się na wyjściu filtru? Jeżeli ten sam sygnał podamy na wejście idealnego filtru górnoprzepustowego o pulsacji granicznej $\omega_g = \dfrac{\omega}{2}$, to jaki sygnał otrzymamy na wyjściu takiego filtru?

Przez filtr idealny należy rozumieć filtr o nieskończenie silnym tłumieniu w pasmie zaporowym.

Zad. 4.
Układ kombinacyjny pokazany na rysunku ma cztery wejścia i jedno wyjście. Układ zbudowany jest z trzech identycznych bloków, oznaczonych literą *K*, połączonych kaskadowo. W skład każdego bloku wchodzą dwa inwertery (negatory) oraz trzy bramki NAND. Posługując się tablicą stanów podaj wyrażenie logiczne wiążące sygnał wyjściowy *Y* pokazanego układu z jego z sygnałami wejściowymi X_1, X_2, X_3, X_4. Jaka może być przydatność takiego układu w informatyce?

Szukane:

$Y = f(X_1, X_2, X_3, X_4) = ?$



Opracowali :
Dr hab. inż. Felicja Wysocka-Schillak
Dr hab. inż. Ryszard Wojtyna
prof. nadzwyczajny UTP

Sprawdzili:
Dr inż. Andrzej Borys
Dr inż. Jarosław Majewski

Zatwierdził:
Przewodniczący Rady Naukowej
Olimpiady „EUROELEKTRA”
Dr hab. inż. Ryszard Wojtyna
prof. nadzwyczajny UTP

„EUROELEKTRA"
OLIMPIADA ELEKTRYCZNA I ELEKTRONICZNA - rozwiązania
Rok szkolny 2007/2008 - Etap trzeci – grupa elektroniczno-telekomunikacyjna

Zad. 1.
Pokazany na rysunku układ jest wzmacniaczem transkonduktancyjnym, którego prąd wyjściowy $I_o = I_{D1}$ - I_{D2} (różnica prądów drenu obu tranzystorów) jest sterowany różnicą napięć wejściowych $V_i = V_1$ - V_2. Układ składa się z pary różnicowej polaryzowanej przez źródło prądowe o wydajności $2I$ i lustra prądowego, które przenosi prąd I_{D1} tranzystora M1 na wyjście. Tranzystory M1 i M2 mają identyczne właściwości, pracują w zakresie słabej inwersji i zakresie pentodowym (zakres nasycenia), a ich prąd drenu I_D jest związany z napięciem bramka-źródło U_{GS} wzorem (1). Pokaż, że statyczna charakterystyka przejściowa tego wzmacniacza, tj. I_o jako funkcja napięcia różnicowego V_i oraz prądu I jest opisana wzorem (2). Na bazie charakterystyki (2) określ (na wyrażeniach ogólnych) transkoduktancję g_m tego układu, zdefiniowaną jako pochodna dI_o/dV_i w punkcie V_i=0.

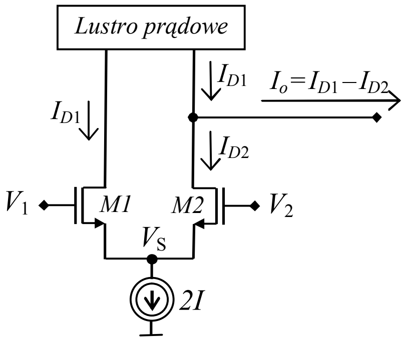
$$I_D \cong I_{D0} e^{kU_{GS}}, \tag{1}$$

gdzie k i I_{D0} są współczynnikami.

$$I_o = 2I\left[\left(1+e^{-kV_i}\right)^{-1} - \left(1+e^{kV_i}\right)^{-1}\right] \tag{2}$$

Dane:
I – prąd polaryzujący parę M1-M2
$I_o = I_{D1}$ - I_{D2}
$V_i = V_1$ - V_2

Szukane:
$I_o = f(V_i, I) = ?$
$$g_m = \frac{dI_o}{dV_i} = f(I) = ?$$



Rozwiązanie
Napięcia bramka-źródło tranzystorów M1 i M2 opisane są wzorami:

$$U_{GS1} = V_1 - V_S \tag{3}$$

$$U_{GS2} = V_2 - V_S \tag{4}$$

Ze schematu widać, że:
$$I_{D1} + I_{D2} = 2I \tag{5}$$

Korzystając z zależności (5) i uwzględniając (1), (3) oraz (4), prądy I_{D1} i I_{D2} można wyrazić następująco:

$$I_{D1} = 2I\left(1+\frac{I_{D2}}{I_{D1}}\right)^{-1} = 2I\left(1+\frac{I_{D0}e^{kU_{GS2}}}{I_{D0}e^{kU_{GS1}}}\right)^{-1} = 2I\left(1+e^{k(U_{GS2}-U_{GS1})}\right)^{-1} = 2I\left(1+e^{k(V_2-V_1)}\right)^{-1} = 2I\left(1+e^{-kV_i}\right)^{-1} \tag{6}$$

$$I_{D2} = 2I\left(1+\frac{I_{D1}}{I_{D2}}\right)^{-1} = 2I\left(1+\frac{I_{D0}e^{kU_{GS1}}}{I_{D0}e^{kU_{GS2}}}\right)^{-1} = 2I\left(1+e^{k(U_{GS1}-U_{GS2})}\right)^{-1} = 2I\left(1+e^{k(V_1-V_2)}\right)^{-1} = 2I\left(1+e^{kV_i}\right)^{-1} \tag{7}$$

Ponieważ prąd wyjściowy I_o jest różnicą prądów I_{D1} i I_{D2}, więc uwzględniając (6) i (7) otrzymuje się:

$$I_o = I_{D1} - I_{D2} = 2I\left[\left(1+e^{-kV_i}\right)^{-1} - \left(1+e^{kV_i}\right)^{-1}\right], \tag{8}$$

co należało udowodnić.

Żeby określić transkonduktancję g_m, należy obliczyć pochodną funkcji (8) po napięciu V_i w punkcie V_i= 0. Pochodna ta wyraża się następująco:

$$\frac{dI_o}{dV_i} = 2I\left[-\left(1+e^{-kV_i}\right)^{-2} e^{-kV_i}(-k) + \left(1+e^{kV_i}\right)^{-2} e^{kV_i}(k)\right] \tag{9}$$

Dla V_i=0 mamy:
$$e^{kV_i} = 1 \tag{10}$$

$$e^{-kV_i} = 1 \tag{11}$$

Uwzględniając (10) i (11) we wzorze (9) otrzymuje się ostatecznie:

$$g_m = 2I\left[\frac{k}{4} + \frac{k}{4}\right] = kI \tag{12}$$

Wzór (12) jest odpowiedzią na drugą część zadania.

Zad. 2.
Energia E sygnału dyskretnego jest określona wzorem:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 , \tag{1}$$

gdzie *x(n)* jest n-tą próbką sygnału.
Dany jest sygnał dyskretny o postaci:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n , \tag{2}$$

gdzie $n \geq 0$.
Wyznaczyć energię tego sygnału.

Rozwiązanie
Podstawiając do wzoru (1) w miejsce $x(n)$ zależność (2), po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \tag{3}$$

Zauważmy, że otrzymane wyrażenie na energię jest sumą ciągu geometrycznego. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 1, a jego iloraz jest równy ¼. Stosując znany wzór na sumę ciągu geometrycznego dostajemy:

$$E = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \tag{4}$$

Zad. 3.
Jeżeli sygnał o postaci:

$$x(t) = [1 + \cos(\omega t + \varphi)]\cos(\omega t) , \tag{1}$$

gdzie ω jest pulsacją wyrażoną w radianach na sekundę,
zostanie podany na wejście idealnego filtru dolnoprzepustowego o pulsacji granicznej $\omega_g = \frac{3\omega}{2}$,
to jaki sygnał pojawi się na wyjściu filtru? Jeżeli ten sam sygnał podamy na wejście idealnego filtru górnoprzepustowego o pulsacji granicznej $\omega_g = \frac{\omega}{2}$, to jaki sygnał otrzymamy na wyjściu takiego filtru?
Przez filtr idealny należy rozumieć filtr o nieskończenie silnym tłumieniu w pasmie zaporowym.

Rozwiązanie
Po wykonaniu mnożenia we wzorze (1) dostajemy:

$$x(t) = \cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi)\cos(\omega t) \tag{2}$$

Korzystając ze znanego wzoru trygonometrycznego:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \tag{3}$$

otrzymujemy:

$$x(t) = \cos(\omega t) + \frac{1}{2}[\cos(\omega t + \varphi - \omega t) + \cos(\omega t + \varphi + \omega t)] = \cos(\omega t) + \frac{1}{2}[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)] \tag{4}$$

Ze wzoru (4) widać, że składowa stała $\bar{x}$ sygnału $x(t)$ jest równa:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\cos(\varphi) , \tag{5}$$

a składowa zmienna równa:

$$x_{ac}(t) = \cos(\omega t) + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + \varphi) \tag{6}$$

Pasmo przenoszenia filtru dolnoprzepustowego sięga do $\omega_g = \frac{3\omega}{2}$, a więc na wyjściu tego filtru pojawi się składowa stała i pierwszy składnik składowej zmiennej, tj. sygnał o postaci:

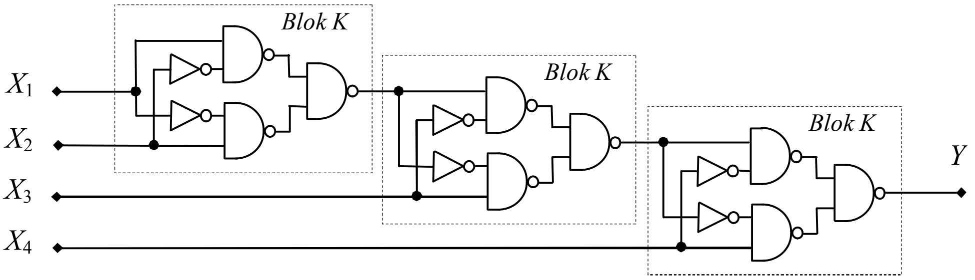
$$y = \frac{1}{2}\cos(\varphi) + \cos(\omega t) \tag{7}$$

Filtr górnoprzepustowy ma dolną pulsację graniczną równą $\omega_g = \frac{\omega}{2}$, a więc na jego wyjściu pojawi się sygnał o postaci (6).

Zad. 4.
Układ kombinacyjny pokazany na rysunku ma cztery wejścia i jedno wyjście. Układ zbudowany jest z trzech identycznych bloków, oznaczonych literą K, połączonych kaskadowo. W skład każdego bloku wchodzą dwa inwertery (negatory) oraz trzy bramki NAND. Posługując się tablicą stanów podaj wyrażenie logiczne wiążące sygnał wyjściowy Y pokazanego układu z jego z sygnałami wejściowymi X_1, X_2, X_3, X_4. Jaka może być przydatność takiego układu w informatyce?

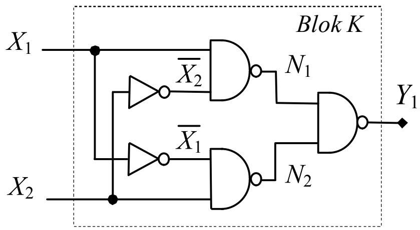
Szukane:

$Y = f(X_1, X_2, X_3, X_4) = ?$



Rozwiązanie
Wprowadzając do każdego z bloków K oznaczenia jak na rysunku poniżej można utworzyć następującą tablicę stanów logicznych:

X_1	X_2	$\overline{X_1}$	$\overline{X_2}$	N_1	N_2	Y_1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0



Z otrzymanej tablicy stanów wynika, że blok K jest bramką typu EX-OR, tzn. realizuje operację sumowania modulo 2, co można zapisać za pomocą wyrażenia:

$$Y_1 = X_1 \oplus X_2 \tag{1}$$

Łącząc kaskadowo dwa takie bloki, sygnał wyjściowy bloku pierwszego Y_1 jest podawany na jedno z wejść bloku drugiego, tj. drugiej bramki EX-OR. Oznaczając przez X_3 drugi sygnał wejściowy tej bramki, sygnał na jej wyjściu (Y_2) będzie opisany wyrażeniem:

$$Y_2 = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \tag{2}$$

Układ podany w treści zadania jest kaskadowym połączeniem trzech bramek EX-OR, a jego sygnał wyjściowy (Y) jest związany z sygnałami wejściowymi zależnością:

$$Y = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 \tag{3}$$

Z wyrażenia (3) wynika, że na wyjściu układu otrzymuje się logiczną jedynkę wtedy i tylko wtedy, gdy w zbiorze sygnałów wejściowych jest nieparzysta liczba jedynek.
Oznacza to, że pokazany układ może w informatyce być wykorzystany do wykonywania operacji zwanej kontrolą parzystości binarnego zbioru czteroelementowego.

Opracowali :
Dr hab. inż. Felicja Wysocka-Schillak
Dr hab. inż. Ryszard Wojtyna
prof. nadzwyczajny UTP

Sprawdzili:
Dr inż. Andrzej Borys
Dr inż. Jarosław Majewski

Zatwierdził:
Przewodniczący Rady Naukowej
Olimpiady „EUROELEKTRA"
Dr hab. inż. Ryszard Wojtyna
prof. nadzwyczajny UTP